

Análisis del comportamiento del error global en los métodos explícitos de Runge-Kutta

Global error behavior analysis in the explicit Runge-Kutta methods

Carlos Marcelo Albarracín¹, María Virginia Quintana^{1,2}

Métodos numéricos/ artículo científico

Citar: Albarracín C. M. y Quintana M. V. (2022). Análisis del comportamiento del error global en los métodos explícitos de Runge-Kutta. *Cuadernos de Ingeniería* (14). <http://revistas.ucasal.edu.ar>

Recibido: octubre/2022

Aceptado: diciembre/2022

Resumen

La resolución numérica de problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias involucra típicamente ingresar las especificaciones del problema y una cota del error local de discretización para generar luego una solución aproximada del problema. No obstante, la obtención precisa y confiable de las soluciones numéricas requiere el conocimiento de la separación admisible entre los nodos de la malla (h). También es necesario llevar un control del error global. Por ello, el objetivo de este trabajo es analizar el comportamiento del error global en los métodos explícitos de Runge-Kutta, determinar su orden y obtener la condición necesaria para garantizar la convergencia.

Palabras claves: Runge-Kutta, error global, control del error, convergencia.

Abstract

The numerical solution of initial value problems of ordinary differential equations typically involves entering the problem specifications and a bound on the local discretization error to then generate an approximate solution of the problem. However, obtaining precise and reliable numerical solutions requires knowledge of the allowable spacing between mesh nodes (h). Also, it is necessary to carry out global error control. Therefore, the aim of this work is to analyze the behavior of the global error in the explicit Runge-Kutta methods, to determine the order of the global error and obtain the necessary condition to guarantee convergence.

Keywords: Runge-Kutta, global error, error control, convergence.

¹ Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina.

² Universidad Católica de Salta, Salta, Argentina

1. Introducción

Los métodos Runge-Kutta (R-K) explícitos son ampliamente utilizados en la resolución numérica de problemas de valor inicial de la forma

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

La solución de este problema se puede aproximar por medio de las siguientes fórmulas de orden p con $1 \leq p \in \mathbb{N}$ (Hull et al., 1972),

$$Y_{n+1} = Y_n + h \sum_{i=1}^s a_i R_i, \quad Y_0 = y_0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

donde Y_{n+1} es la aproximación al valor exacto $y(x_{n+1})$, h es la longitud del paso o separación de los nodos de la malla ($h = x_{n+1} - x_n$), N el índice del último punto de la malla en donde se calcula la solución aproximada, $s \geq p$ y R_i se define como

$$R_i = f \left(x_n + h b_i, Y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} R_j \right).$$

Los coeficientes a_i , b_i y c_{ij} son constantes que dependen del método R-K elegido.

Un aspecto importante en cualquier método numérico reside en determinar expresiones que acoten el error que se comete por su aplicación. En los métodos R-K se identifican tres tipos de errores: el error local de discretización $e(x;h)$, el error local de truncamiento $e_t(x;h)$ y el error global $E(x_n;h)$. El primero se obtiene a partir de reemplazar la solución aproximada por la exacta en la ecuación en diferencias escrita en forma normal, esto es

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)).$$

La diferencia entre los dos términos, que es distinta de cero, constituye el error local de discretización

$$e(x;h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)). \quad (2)$$

Como es conocido, el error local de discretización de los métodos de orden p pertenece al conjunto de funciones $O(h^p)$ y es un error que se comete en x . Por ejemplo, en el caso del método de Euler es de orden $O(h)$, y $O(h^4)$ para los R-K de cuarto orden. Este error es inherente al método y su expresión es la misma en cualquier punto de la malla.

El error local de truncamiento (Isaacson y Keller, 1994) es el que surge al proponer la solución exacta por medio de la fórmula del método, pero considerando exactos todos los valores previos. Si se parte de (2) resulta

$$y(x+h) = y(x) + h \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)) + h \cdot e(x;h). \quad (3)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3), el último término es el error local de truncamiento, es decir

$$e_i(x;h) = h \cdot e(x;h),$$

el cual, de acuerdo con Higham (1991) es de orden $O(h^{p+1})$. También es posible obtener la expresión de este error a partir del desarrollo en serie de Taylor de $y(x+h)$. En la literatura es habitual que se refiera a este error como equivalente al error local de discretización. La diferencia conceptual reside en que, a diferencia del error local de discretización, el de truncamiento es un error de orden mayor y se comete en $(x+h)$

2. Análisis del error global

El error global es el que surge por la acumulación de errores locales, por errores en la evaluación de la función $f(x,y)$ y por errores de redondeo que dependen del dispositivo de cálculo o de la cantidad de dígitos significativos utilizados.

El error global se define como

$$E(x_n;h) = y(x_n) - Y(x_n).$$

En la bibliografía del tema, como por ejemplo en Enright (1989), se determina para el caso del método de Euler que el error global es de orden $O(h)$, lo cual constituye una cota superior del error y se aclara que dicha cota resulta en una sobreestimación del error. Esto es así ya que la cota obtenida no es el supremo.

La ecuación en diferencias correspondiente a la ecuación (1) se expresa como función de la siguiente manera:

$$Y(x+h) = Y(x) + h \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, Y(x)).$$

Restando de la ecuación (3) la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} y(x+h) - Y(x+h) &= y(x) + h \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)) + h \cdot e(x;h) - Y(x) - h \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, Y(x)) \\ &= y(x) - Y(x) + h \left[\sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)) - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, Y(x)) \right] + h \cdot e(x;h), \end{aligned}$$

es decir,

$$E(x+h;h) = E(x;h) + h \left[\sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)) - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, Y(x)) \right] + h \cdot e(x;h).$$

De la ecuación (4) se observa que el valor del error global en $x+h$ involucra el error global en el paso anterior x , la diferencia que surge de evaluar $\sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)) - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, Y(x))$ y el aporte del error local de discretización en x .

A partir de (4) y para $x = x_n$ se tiene

$$E(x_{n+1}; h) = E(x_n; h) + h \left[\sum_{i=1}^s a_i R_i(x_n, y_n) - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x_n, Y_n) \right] + h \cdot e(x_n; h) \quad (5)$$

y para $x = x_{n-1}$

$$E(x_n; h) = E(x_{n-1}; h) + h \left[\sum_{i=1}^s a_i R_i(x_{n-1}, y_{n-1}) - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x_{n-1}, Y_{n-1}) \right] + h \cdot e(x_{n-1}; h). \quad (6)$$

Al adoptar

$$F_p(x, y(x)) = \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)),$$

y reemplazando la ecuación (6) en la ecuación (5) resulta

$$E(x_{n+1}; h) = E(x_{n-1}; h) + h \left\{ \left[F_p(x_{n-1}, y_{n-1}) - F_p(x_{n-1}, Y_{n-1}) \right] + \left[F_p(x_n, y_n) - F_p(x_n, Y_n) \right] \right\} + h \cdot \left[e(x_{n-1}; h) - e(x_n; h) \right].$$

En forma análoga, aplicando el procedimiento anterior para $x = x_{n-2}, x = x_{n-3}, \dots, x = x_0$ se obtiene la forma general

$$E(x_{n+1}; h) = E(x_0; h) + h \sum_{i=0}^n \left[F_p(x_i, y_i) - F_p(x_i, Y_i) \right] + h \sum_{i=0}^n e(x_i; h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Si se considera la condición inicial del problema en x_0 , se tiene $Y_0 = y_0$ por lo tanto $E(x_0; h) = 0$ y $F_p(x_0, y_0) - F_p(x_0, Y_0) = 0$ entonces

$$E(x_{n+1}; h) = h \sum_{i=1}^n \left[F_p(x_i, y_i) - F_p(x_i, Y_i) \right] + h \sum_{i=0}^n e(x_i; h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Con el propósito de determinar el orden del error global, se establecen las siguientes hipótesis para la función $F_p(x, y)$

- F_p es continua en la variable x .
- F_p satisface la condición de Lipschitz para y , es decir que para todo $i \geq 0$ existe $L_i > 0$ tal que $\left| F_p(x_i, y_i) - F_p(x_i, Y_i) \right| \leq L_i |y_i - Y_i|$.

Tomando valor absoluto en (7) se tiene

$$\left| E(x_{n+1}; h) \right| \leq h \sum_{i=1}^n \left| F_p(x_i, y_i) - F_p(x_i, Y_i) \right| + h \sum_{i=0}^n \left| e(x_i; h) \right|.$$

A partir de la expresión anterior y recurriendo a la condición de Lipschitz, se obtiene

$$\left| E(x_{n+1}; h) \right| \leq h \sum_{i=1}^n L_i |y_i - Y_i| + h \sum_{i=0}^n \left| e(x_i; h) \right|.$$

Al introducir la constante $K = \max_{1 \leq i \leq n} \{L_i\}$ y teniendo presente que $|y_i - Y_i| = |E(x_i; h)|$ la expresión anterior se reduce a

$$|E(x_{n+1}; h)| \leq h \cdot K \sum_{i=1}^n |E(x_i; h)| + h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)|. \quad (8)$$

La ecuación (8) constituye una cota para el error global, donde el segundo término de la derecha de la desigualdad es de orden $O(h^{p+1})$.

Para estudiar el orden de $E(x_{n+1}; h)$ se procede con el análisis del término $h \cdot K \sum_{i=1}^n |E(x_i; h)|$. Si en la ecuación (8) se considera $n = 0$, se obtiene

$$|E(x_1; h)| \leq h \cdot |e(x_0; h)|.$$

Para $n = 1$:

$$|E(x_2; h)| \leq h^2 K \cdot |e(x_0; h)| + h \sum_{i=0}^1 |e(x_i; h)|.$$

Para $n = 2$:

$$|E(x_3; h)| \leq h^3 K^2 \cdot |e(x_0; h)| + h^2 K \cdot |e(x_0; h)| + h^2 K \sum_{i=0}^1 |e(x_i; h)| + h \sum_{i=0}^2 |e(x_i; h)|. \quad (9)$$

A partir de la ecuación (9) y por inducción se puede deducir que la expresión de $|E(x_{n+1}; h)|$ es de la forma

$$|E(x_{n+1}; h)| \leq a_{p+2} h^{p+2} + a_{p+3} h^{p+3} + \dots + a_{p+n+1} h^{p+n+1} + h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)|,$$

es decir,

$$|E(x_{n+1}; h)| \leq \sum_{i=1}^n a_{p+i+1} h^{p+i+1} + h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)| = g_1(h) + h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)|, \quad (10)$$

en donde $g_1(h) = \sum_{i=1}^n a_{p+i+1} h^{p+i+1}$ y los $a_i > 0$, $i = p+2, p+3, \dots, p+n+1$.

La expresión dada en la ecuación (10) es la cota del error global. Resulta relevante determinar el orden de este error, por lo tanto, se analizan los términos involucrados.

TEOREMA

Para todo $h \in (0,1)$ la función $g_1(h)$ pertenece al conjunto de funciones de orden $O(h^{p+2})$.

DEMOSTRACIÓN

La función $g_1(h) \in O(h^{p+2})$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que para la función $g_2(h) = h^{p+2}$, se verifica $g_1(h) \leq C \cdot g_2(h)$, $\forall h \in (0,1)$. Entonces $C \geq \max_{0 \leq h \leq 1} \{g_1(h)/g_2(h)\}$

De la definición de $g_1(h)$ y $g_2(h)$ se tiene $g_1(0) = g_2(0) = 0$. Dado que la constante C puede tomar su valor máximo en los extremos del intervalo $[0,1]$, resulta

$$C \geq \lim_{h \rightarrow 1} \frac{g_1(h)}{g_2(h)} = a_{p+2} + a_{p+3} + \dots + a_{p+n+1}.$$

Planteando $g_1(h) - C \cdot g_2(h) \leq 0$ con $C = a_{p+2} + a_{p+3} + \dots + a_{p+n+1}$ y para todo h perteneciente al intervalo $(0,1)$ se obtiene:

$$a_{p+2}h^{p+2} + a_{p+3}h^{p+3} + \dots + a_{p+n+1}h^{p+n+1} - (a_{p+2} + a_{p+3} + \dots + a_{p+n+1})h^{p+2} \leq 0,$$

es decir,

$$a_{p+3}(h^{p+3} - h^{p+2}) + \dots + a_{p+n+1}(h^{p+n+1} - h^{p+2}) \leq 0.$$

Tomando factor común h^{p+2} se obtiene la siguiente desigualdad

$$h^{p+2} [a_{p+3}(h-1) + a_{p+4}(h^2-1) + \dots + a_{p+n+1}(h^{n-1}-1)] \leq 0. \quad (11)$$

Considerando que $h \in (0,1)$ y que los factores $(h-1), (h^2-1), \dots, (h^{n-1}-1)$ toman valores negativos, se verifica que $g_1(h) - C \cdot g_2(h) \leq 0$, por lo tanto, resulta $g_1(h) \in O(h^{p+2})$.

De la demostración se concluye que $g_1(h) \leq C \cdot g_2(h)$. Esto también se cumple si se adopta $g_2(h) = h^{p+d}$ en dónde $1-p \leq d \leq 2$. Entonces, las funciones $C \cdot h^{p+d}$ acotan superiormente a g_1 siendo la menor de ellas $C \cdot h^{p+2}$.

Por otra parte, si se propone $g_2(h) = h^{p+d}$, $d \geq 3$, el primer factor de la ecuación (11) queda de la forma $a_{p+2}(h^{-d+2} - 1)$. Por lo tanto, para un $h \in (0,1)$ lo suficientemente pequeño, se tendrá $g_1(h) > C \cdot g_2(h)$ al menos en algunos nodos de la malla.

COROLARIO

Para los métodos R-K dados por (1), asumiendo $h \in (0,1)$ el error global dado por (8) está compuesto por los términos: $h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)| \in O(h^{p+1})$ y $h \cdot K \sum_{i=1}^n |E(x_i; h)| \in O(h^{p+2})$, por lo tanto resulta

$$|E(x_{n+1}; h)| \in O(h^{p+1}).$$

De esta forma se concluye que toda función de la forma $C_n h^d$, $1 \leq d \leq p+1$ es una cota superior del error global $E(x_{n+1}; h)$ y para $d = p+1$ se tiene el supremo del error global.

EJEMPLO 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y'(x) = 2x - (y - x^2), \quad y(0) = 0,$$

cuya solución exacta es $y(x) = x^2$. Al ser $x_n = x_0 + n \cdot h$, la solución exacta en los puntos particulares x_2 y x_6 en función de h es $y_2 = 4 \cdot h^2$ y $y_6 = 36 \cdot h^2$, respectivamente.

La aplicación del método de Euler (R-K de primer orden) en los mismos puntos resulta:

$$Y_2 = 2 \cdot h^2 + h^3,$$

$$Y_6 = 30 \cdot h^2 + 15 \cdot h^3 - 20 \cdot h^4 + 15 \cdot h^5 - 6 \cdot h^6 + h^7.$$

Por lo tanto, el error global en ambos casos es

$$E(x_2; h) = |2 \cdot h^2 - h^3| \quad \text{y}$$

$$E(x_6; h) = |6 \cdot h^2 - 15 \cdot h^3 + 20 \cdot h^4 - 15 \cdot h^5 + 6 \cdot h^6 - h^7|.$$

Del corolario se tiene que el error global pertenece al conjunto de funciones $O(h^2)$. Entonces:

$$C_2 \geq \max_{0 \leq h \leq 1} \left\{ \frac{|E(x_2; h)|}{h^2} \right\} \quad \text{y} \quad C_6 \geq \max_{0 \leq h \leq 1} \left\{ \frac{|E(x_6; h)|}{h^2} \right\}.$$

Para el problema en estudio, los valores máximos de las constantes C_2 y C_6 se obtienen para $h = 0$ por lo tanto resulta

$$C_2 \geq \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{|E(x_2; h)|}{h^2} \right\} = 2 \quad \text{y} \quad C_6 \geq \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{|E(x_6; h)|}{h^2} \right\} = 6.$$

En la Figura 1 se grafican los valores de las funciones $|E(x_2; h)| - 2 \cdot h^2$ y $|E(x_6; h)| - 6 \cdot h^2$. Se observa que siempre toman valores negativos en el intervalo $(0, 1)$, lo cual indica que los errores globales en x_2 y x_6 están acotados por funciones de orden $O(h^2)$.

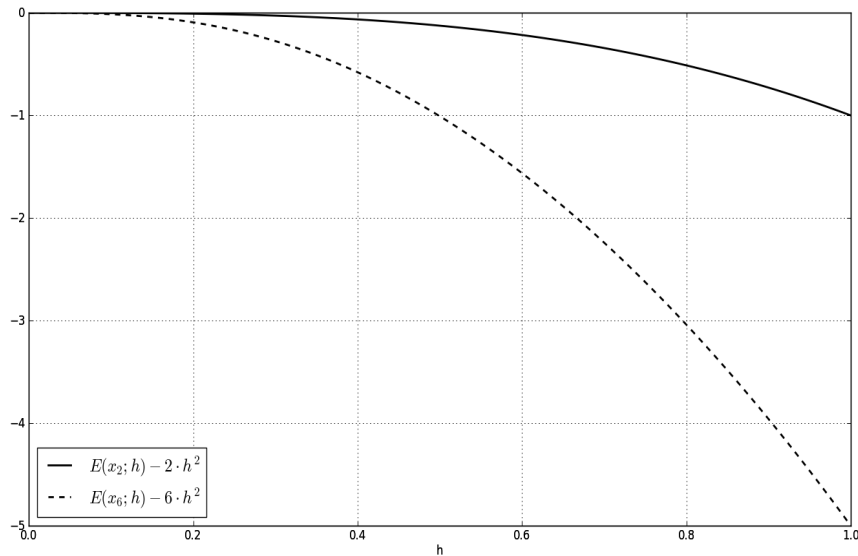


Figura 1. Gráfico de las funciones $|E(x_2; h)| - 2 \cdot h^2$ y $|E(x_6; h)| - 6 \cdot h^2$.

3. Condición necesaria de convergencia

Los métodos basados en ecuaciones de diferencias son convergentes con respecto a la ecuación diferencial que aproximan, si se verifica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \max_{1 \leq n \leq N} \left[\left| y(x_n) - Y(x_n) \right| \right] \right\} = 0. \quad (12)$$

Esto es, el error global debe tender a cero cuando h tiende a cero, es decir: $\lim_{h \rightarrow 0} |E(x_n; h)| = 0$, $n = 1, 2, \dots, N$.

De (10) se concluye que además de $h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)|$, el error global $|E(x_{n+1}; h)|$ tendrá términos con factores $h^{p+n+1} K^n$, $h^{p+n} K^{n-1}$, ..., $h^{p+2} K$. El factor elevado a la mayor potencia en (10) $h^{p+n+1} K^n$ se puede expresar como $h^{p+1} (h \cdot K)^n$. Entonces, para que se verifique la condición (12) para toda $h \in (0, 1)$ se debe satisfacer

$$(h \cdot K)^n \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

es decir:

$$h \cdot K \leq 1. \quad (13)$$

La ecuación (13) constituye una condición necesaria de convergencia para todo método R-K de orden p de la forma dada por la ecuación (1).

EJEMPLO 2

Considérese el siguiente problema de valor inicial

$$y'(x) = -\beta \cdot y, \quad y(0) = y_0,$$

en donde $0 \leq \beta \in \mathbb{R}$. Satisfacer la condición necesaria de convergencia implica que esta se debe cumplir en todos los puntos x_n de la malla. De la condición de Lipschitz para el caso de Euler se tiene

$$|-\beta \cdot y_n + \beta \cdot Y_n| \leq L_n |y_n - Y_n| \Leftrightarrow \beta |y_n - Y_n| \leq L_n |y_n - Y_n|.$$

Multiplicando por h y simplificando resulta

$$h \cdot \beta \leq h \cdot L_n \leq 1.$$

Es decir que, para el método de Euler, la condición necesaria de convergencia es

$$h \leq \frac{1}{\beta}.$$

Si se adopta un R-K de segundo orden se tendrá

$$\begin{aligned} \left| -(a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta(1 - h \cdot c_{21}\beta)) \cdot y + (a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta(1 - h \cdot c_{21}\beta)) \cdot Y_n \right| &\leq L_n |y_n - Y_n|, \\ \left| a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta(1 - h \cdot c_{21}\beta) \right| \cdot |-y_n + Y_n| &\leq L_n |y_n - Y_n|, \end{aligned}$$

es decir

$$h \cdot |a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta(1 - h \cdot c_{21}\beta)| \leq 1. \quad (14)$$

Teniendo presente que los métodos de segundo orden deben satisfacer las ecuaciones $b_2 = c_{21}$, $a_1 + a_2 = 1$ y $a_2 b_2 = 1/2$ (Atkinson, 1978; Burden y Faires, 1985) y que la desigualdad dada por (14) tiene como solución $0 \leq h \leq (a_1 + a_2)/(c_{21} a_2 \beta)$ resulta que la condición necesaria de convergencia se satisface cuando

$$h \leq \frac{a_1 + a_2}{c_{21} a_2 \beta} = \frac{2}{\beta}.$$

4. Control de la longitud de paso h

La condición de convergencia dada por (13) implica que en cada x_n se debe satisfacer la desigualdad $h \cdot L_n \leq 1$. Por lo tanto, es posible plantear

$$\left| F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1}) \right| \leq L_{n+1} |y_{n+1} - Y_{n+1}|$$

y al multiplicar por h se tiene

$$h \left| F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1}) \right| \leq h \cdot L_{n+1} |y_{n+1} - Y_{n+1}|.$$

Considerando la condición dada por (13) resulta

$$\frac{h \left| F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1}) \right|}{|y_{n+1} - Y_{n+1}|} \leq h \cdot L_{n+1} \leq 1, \quad (15)$$

en donde $|y_{n+1} - Y_{n+1}|$ se puede expresar de la siguiente forma

$$|y_{n+1} - Y_{n+1}| = \left| y_n + h \cdot F_s(x_n, y_n) + h \cdot e(x_n; h) - Y_n - h \cdot F_s(x_n, Y_n) \right|.$$

Es usual que en los algoritmos de los métodos R-K con control de paso se asuma $Y_n \approx y_n$ por lo que la expresión anterior resulta

$$|y_{n+1} - Y_{n+1}| \approx h \left| e(x_n; h) \right|.$$

Al reemplazar esta última expresión en (15) se tiene

$$\frac{|F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1})|}{|e(x_n; h)|} \leq 1. \quad (16)$$

Por otra parte, si se admite una cota para el error local, entonces de la ecuación (16) se tiene

$$|F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1})| \leq |e(x_n; h)| \leq \varepsilon, \quad (17)$$

es decir, la longitud de paso h se debe adaptar para que las dos condiciones dadas por (17) se verifiquen simultáneamente en todo x_n .

5. Algoritmo para el control de h

A partir de los resultados obtenidos es posible implementar un algoritmo para modificar la longitud de paso h con el propósito de satisfacer la condición de convergencia (13) y mantener acotado el error local de discretización.

Supóngase que se recurre a dos métodos de R-K, de orden p y $p+1$. Asumiendo que los valores obtenidos con el método de orden $p+1$ son lo suficientemente precisos como para considerarlos exactos, es decir

$$y_{n+1} = y_n + h F_{p+1}(x_n, y_n). \quad (18)$$

Al plantear el error local de discretización del método de orden p se tiene

$$|e(x_n; h)| = \left| \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - F_p(x_n, y_n) \right|$$

y al reemplazar y_{n+1} por la expresión (18) resulta

$$|e(x_n; h)| = |F_{p+1}(x_n, y_n) - F_p(x_n, y_n)| \quad (19)$$

A partir de las ecuaciones (17) y (18), se puede ajustar la longitud del paso, disminuyéndola o incrementándola según se requiera de acuerdo con los criterios dados por la condición de convergencia y cota del error local de discretización. Una posibilidad es la siguiente:

A PARTIR DE $h = 1$:

SI $|F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1})| > |e(x_n; h)|$ O $|e(x_n; h)| > \varepsilon$, DISMINUIR h

SI $|F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1})| < 0.96 |e(x_n; h)|$ Y $|e(x_n; h)| < 0.96 \varepsilon$, INCREMENTAR h

6. Resultados numéricos

Para ilustrar la aplicación del control del paso h se propone el siguiente problema de valor inicial.

EJEMPLO 3

Considérese el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'(x) &= -32(x-1)y \ln(2), \quad \forall x \in (0, 2), \\ y(0) &= a, \end{aligned}$$

en donde $0 < a \in \mathbb{R}$, y cuya solución exacta es $y = a \cdot 2^{16(2x-x^2)}$.

En forma análoga al procedimiento aplicado en el ejemplo 2, la condición necesaria de convergencia dada por (13) resulta dependiente de n esto es

$$h|nh-1| \leq \frac{1}{32 \ln(2)}.$$

La implementación del algoritmo propuesto en el punto anterior para el control de paso utiliza los métodos R-K de cuarto orden clásico (Atkinson, 1978) y tercer orden con coeficientes:

$$a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{1}{6}, b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = 1, c_{21} = \frac{1}{2}, c_{31} = -1, c_{32} = 2.$$

Al adoptar $\varepsilon = 10^{-3}$ como cota para el error local de discretización se obtienen variaciones en el paso h , las que se muestran en las Figuras 2 y 3, considerando dos casos, el primero para $a = 2 \cdot 10^{-2}$ y el segundo para $a = 2 \cdot 10^{-10}$.

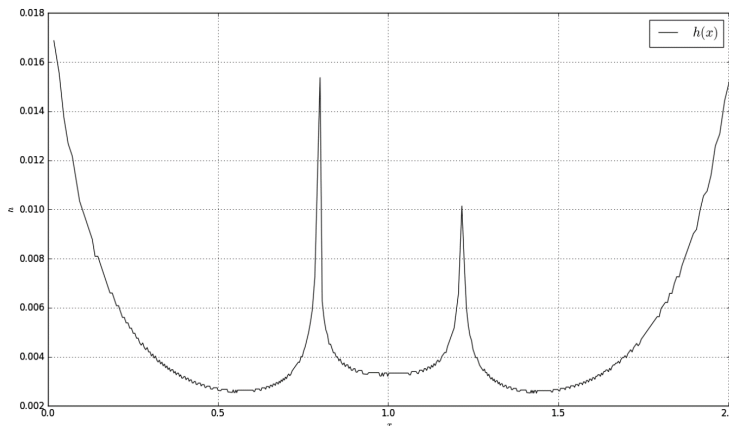


Figura 2. Variación del paso h en función de x para $a = 2 \cdot 10^{-2}$.

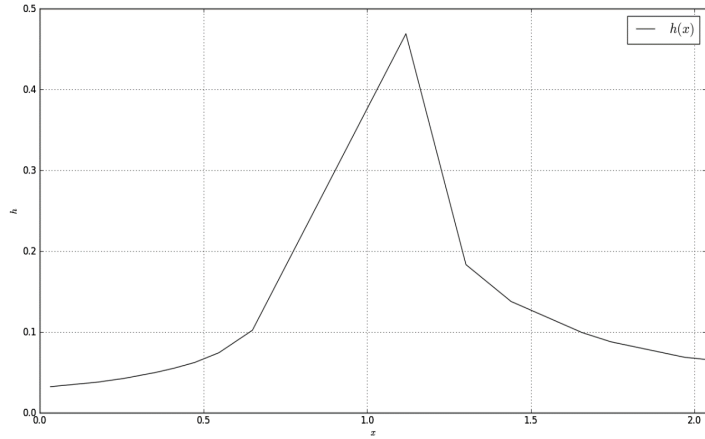


Figura 3. Variación del paso h en función de x para $a = 2 \cdot 10^{-10}$.

En las Tablas 1 y 2 se muestran, respectivamente, resultados numéricos de los dos casos. Los valores de y_n corresponden al R-K de cuarto orden clásico.

Tabla 1. Valores de la solución aproximada, condición necesaria de convergencia, error local de discretización y error global para $a = 2 \cdot 10^{-2}$.

n	x[n]	y[n]	hL[n]	e[n]	E[n]
0	0.0000	2.000000E-02	-----	9.349076E-04	0.000000E+00
1	0.0169	2.898355E-02	0.439327	9.926961E-04	-2.898355E-02
2	0.0324	4.057131E-02	0.391823	9.056310E-04	-4.057131E-02
3	0.0462	5.438925E-02	0.334681	8.989596E-04	-5.438925E-02
4	0.0589	7.099291E-02	0.300432	9.846190E-04	-7.099291E-02
5	0.0710	9.137621E-02	0.282736	9.431558E-04	-9.137621E-02
6	0.0822	1.149727E-01	0.254619	8.861561E-04	-1.149727E-01
7	0.0926	1.417302E-01	0.229736	9.241484E-04	-1.417302E-01
8	0.1025	1.728732E-01	0.217011	9.548585E-04	-1.728732E-01
9	0.1120	2.087612E-01	0.205119	9.780283E-04	-2.087612E-01
10	0.1212	2.497312E-01	0.193995	9.936004E-04	-2.497312E-01
-----	-----	-----	-----	-----	-----
507	1.9499	5.906090E-02	0.214737	9.889483E-04	-5.906090E-02
508	1.9625	4.522773E-02	0.237124	8.963965E-04	-4.522773E-02
509	1.9756	3.414758E-02	0.248116	9.637813E-04	-3.414758E-02
510	1.9900	2.492902E-02	0.273759	8.897618E-04	-2.492902E-02
511	2.0053	1.776957E-02	0.291463	6.741444E-04	-1.776957E-02

Tabla 2. Valores de la solución aproximada, condición necesaria de convergencia, error local de discretización y error global para $a = 2 \cdot 10^{-10}$.

n	x[n]	y[n]	hL[n]	e[n]	E[n]
0	0.0000	2.000000E-10	-----	6.431155E-11	0.000000E+00
1	0.0324	4.054054E-10	0.971433	1.280238E-10	3.344570E-13
2	0.0661	8.249104E-10	0.975112	2.531049E-10	1.378327E-12
3	0.1012	1.681773E-09	0.974869	4.953840E-10	4.251653E-12
4	0.1377	3.428087E-09	0.970212	9.563754E-10	1.160547E-11
5	0.1757	6.969869E-09	0.960632	1.920831E-09	2.948449E-11
6	0.2160	1.429102E-08	0.969145	3.805289E-09	7.319923E-11
7	0.2588	2.943637E-08	0.969234	7.809237E-09	1.778219E-10
8	0.3051	6.147625E-08	0.982571	1.564930E-08	4.329427E-10
9	0.3552	1.293111E-07	0.980719	3.186975E-08	1.046240E-09
10	0.4106	2.754744E-07	0.981870	6.479146E-08	2.541435E-09
11	0.4729	5.952107E-07	0.974275	1.410141E-07	6.229308E-09
12	0.5473	1.334888E-06	0.975690	3.652812E-07	1.603648E-08
13	0.6496	3.309266E-06	0.961854	4.839602E-07	4.865406E-08
14	1.1187	9.767843E-06	0.555182	1.328937E-06	1.443444E-06
15	1.3021	4.140263E-06	0.944053	1.527712E-06	6.220009E-07
16	1.4400	1.375777E-06	0.954466	1.252875E-06	1.555230E-07
17	1.5571	4.088481E-07	0.991829	5.268248E-07	1.069210E-08
18	1.6565	1.187566E-07	0.969379	1.917359E-07	-8.733434E-09
19	1.7445	3.402496E-08	0.959003	6.840481E-08	-5.985456E-09
20	1.8256	9.556561E-09	0.972205	2.206446E-08	-2.724136E-09
21	1.9003	2.665805E-09	0.970526	6.652448E-09	-1.031351E-09
22	1.9692	7.445654E-10	0.957306	2.176437E-09	-3.526068E-10
23	2.0353	2.050525E-10	0.979358	7.747528E-10	-1.149102E-10

Del análisis de los resultados obtenidos surge que para $a = 2 \cdot 10^{-2}$ todas las correcciones que disminuyen h se deben a la necesidad de mantener acotado el error local en $\varepsilon = 10^3$. Los valores de h resultantes son suficientes para verificar la condición de convergencia. En el caso de $a = 2 \cdot 10^{-10}$, las correcciones son efectuadas solamente para poder satisfacer la condición necesaria de convergencia, ya que el error local siempre es menor que la cota ε . Para valores intermedios del coeficiente a , las correcciones se realizan para satisfacer las dos condiciones.

7. Conclusiones

Se ha demostrado para los métodos Runge-Kutta explícitos de orden p , que el supremo del error global es de orden $p + 1$. Si bien existen cotas superiores de orden menor a $p + 1$ la menor de todas ellas pertenece a $O(h^{p+1})$. Es importante destacar que no debe confundirse el concepto de cota del error global con orden de convergencia del método, dado que éste debe analizarse a partir de la relación entre las soluciones con diferentes longitudes de paso h para el mismo punto x_n de la malla. El enfoque adoptado para la demostración del orden del error global ha permitido establecer de manera conceptualmente clara la condición necesaria de convergencia para todos los métodos Runge-Kutta, cuyo cumplimiento en ciertos problemas es imprescindible para obtener resultados confiables, tal como se muestra en el Ejemplo 3. Un algoritmo que contemple correcciones por los criterios de cota de error local de discretización y condición necesaria de convergencia permite mantener acotado el error global, así como también despreocuparse de proponer el valor de h adecuado para satisfacer la condición de convergencia.

Referencias

- Atkinson, K. (1978). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Burden, R. L. y Faires, J. D. (1985). *Análisis numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Enright, W. H. (1989). A New Error-Control for Initial Value Solvers. *Applied Mathematics and Computation*, 31, 285301.
- Higham, D. J. (1991). Global Error versus Tolerance for Explicit Runge-Kutta Methods. *Journal of Numerical Analysis*, 11, 457480.
- Hull, T. E.; Enright, W. H.; Fellen, B. M. y Sedgwick, A.E. (1972). Comparing Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. *Journal of Numerical Analysis. SIAM*, 9(4), 603637.
- Isaacson, E. y Keller, H. B. (1994). *Analysis of Numerical Methods*. Dover Publications.

Carlos Marcelo Albarracín

Perfil académico y profesional: Ingeniero Mecánico Aeronáutico. Doctor en Ingeniería. Profesor adjunto regular de Análisis Numérico en la carrera Ingeniería Química, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta. Coautor de artículos publicados en revistas internacionales con referato. Actualmente codirige un proyecto de investigación del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (UNSa). Su investigación está orientada a las matemáticas aplicadas y a métodos numéricos y computacionales.

Correo electrónico: cmalba@unsa.edu.ar

María Virginia Quintana

Perfil académico y profesional: Ingeniera Civil. Doctora en Ingeniería. Profesora titular de Métodos Numéricos de la carrera Ingeniería Civil en la Universidad Católica de Salta (UCASal). Es Investigadora Asistente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) en el Instituto de Investigaciones para la Industria Química (INIQUI). Coautora de numerosos artículos publicados en revistas internacionales con referato. Es directora de proyectos de investigación y coordinadora de proyectos de vinculación tecnológica. Su investigación actual se centra en las matemáticas aplicadas y en los métodos computacionales, en la mecánica computacional, las vibraciones mecánicas y los materiales compuestos.

Correo electrónico: mvquintana@ucasal.edu.ar

